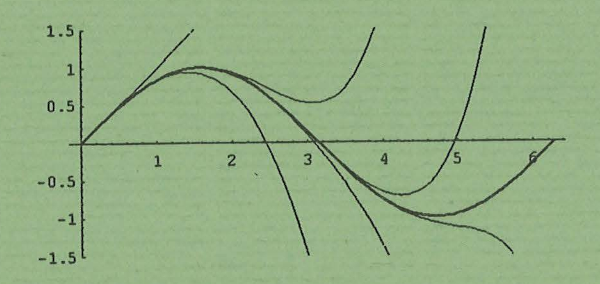
DESARROLLOS LIMITADOS

APROXIMACIÓN POLINÓMICA DE FUNCIONES

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

DESARROLLOS LIMITADOS

APROXIMACIÓN POLINÓMICA DE FUNCIONES

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Desarrollos limitados. Aproximación polinómica de funciones

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Edición a cargo de: Miguel de Unamuno Adarraga
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 8.02
ISBN: 84-95365-18-9
Depósito Legal: M-49059-1999

I - La fórmula de Taylor

Introducción

En estas notas se hablará del tema central del Cálculo diferencial: la aproximación *local* (es decir, en entornos de un punto dado) de una función por un polinomio. En el caso de una variable del que nos vamos a ocupar, será la aproximación, en un entorno de un punto $x=a$, de una función $x \mapsto f(x)$ por otra $x \mapsto p(x)$, donde

$$p(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k .$$

Ya conocemos la aproximación de una función mediante un polinomio de grado 1, es decir, la de una función *diferenciable* por su *diferencial* en un punto, o, en lenguaje geométrico, la de una *curva* (en sentido amplio) por su *tangente*. Lo que buscamos ahora es una extensión de esto, en la que consideramos para el polinomio grados superiores a 1. Al perseguir este objetivo nos encontramos en primer lugar con un resultado fundamental.

Teorema de Taylor

Teorema. Sea *f* una función de clase C^n en un intervalo cerrado $I=[a,b]$, derivable $n+1$ veces en el interior de *I*, (a,b). Existe entonces un punto $c\in(a,b)$ tal que se verifica la igualdad

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1};$$

es la llamada **fórmula de Taylor**.

Demostración. Sea λ el número real para el que se verifica la identidad

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{\lambda}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

(λ es la raíz, única, de una ecuación de primer grado); habrá que demostrar que, efectivamente, $\lambda=f^{(n+1)}(c)$ para algún *c* en el interior del intervalo.

Definamos en I la función φ de la siguiente forma:

$$\varphi(x)=f(b)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(b-x)-\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-$$
$$-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n-\frac{\lambda}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}.$$

Evidentemente, esta función φ es continua en I y derivable en su interior, pues por las hipótesis del teorema todos los sumandos de su definición lo son, y además $\varphi(a)=\varphi(b)$ (ambos son nulos), luego cumple las condiciones del teorema de Rolle; es decir, existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\varphi'(c)=0.$$

Calculemos la derivada de φ (colocamos entre corchetes la derivada de cada sumando):

$$\varphi'(x)=-f'(x)+\left[\frac{f'(x)}{1!}-\frac{f''(x)}{1!}(b-x)\right]+\left[\frac{f''(x)}{2!}2\,(b-x)-\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2\right]+\cdots$$
$$\cdots+\left[\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)\,(b-x)^{n-2}-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right]+$$
$$+\left[\frac{f^{(n)}(x)}{n!}n\,(b-x)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n\right]+\frac{\lambda}{(n+1)!}(n+1)\,(b-x)^n=$$
$$=\left(-f^{(n+1)}(x)+\lambda\right)\frac{(b-x)^n}{n!},$$

ya que los términos de la suma del segundo miembro se simplifican según el esquema $-A+[A-B]+[B-C]+\cdots$.

Particularicemos para $x=c$ e igualemos a 0:

$$\left(-f^{(n+1)}(c)+\lambda\right)\frac{(b-c)^n}{n!}=0;$$

y como $b-c\neq 0$, resulta finalmente

$$\lambda=f^{(n+1)}(c).\ \blacksquare$$

Si damos a b un valor variable (dentro de un intervalo en el que se cumplan las hipótesis del teorema, naturalmente), es decir, llamamos $b=x$ y $c=\xi$ con ξ entre a y x, la fórmula de Taylor toma la forma

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

expresión en la que queda más de manifiesto el carácter de aproximación polinomial a la función *f*. Si del segundo miembro excluimos el último sumando obtenemos un polinomio, perfectamente definido, que aproxima la función; es la llamada *parte regular* del desarrollo; el citado último sumando,

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

cuyo coeficiente no queda explícitamente determinado, es el llamado *resto* (o *término complementario*) *de orden n*, y será el *error* de la aproximación.

Para $n=0$ obtenemos

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(\xi)}{1!}(x-a),$$

es decir, la fórmula de los incrementos finitos.

Para $n=1$,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2:$$

la parte regular, *aproximación lineal* a la función, es, en términos geométricos, la ecuación de la *tangente* a la curva en el punto $x=a$.

En el caso particular $a=0$ (con lo que $\xi=\theta x$, siendo θ un parámetro entre 0 y 1) a la fórmula de Taylor se la llama también con frecuencia fórmula de MacLaurin.

La forma que hemos visto para el resto es la llamada *forma de Lagrange*, que permite aproximar numéricamente el valor de *f* en un punto $x=x_0$, supuesto que conozcamos los valores de f y sus derivadas hasta un orden *n* en $x=a$ y podamos acotar $f^{(n+1)}$ en el intervalo de extremos a y x_0. En efecto, si $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq K$ en dicho intervalo, será $\left|r_n(x_0)\right|\leq K\frac{\left|x_0-a\right|^{n+1}}{(n+1)!}$ (y el valor de $\frac{1}{(n+1)!}$ decrece muy rápidamente al crecer *n*). Más adelante dedicaremos un apartado a esto y veremos algunos ejemplos.

Pero si lo que nos interesa no es calcular numéricamente el valor de una función, sino hacer su estudio *local* en un punto, puede convenirnos más otra forma para el resto. Se demuestra que, con hipótesis similares o aún menos restrictivas, la fórmula de Taylor puede escribirse así:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x\text{-}a)\ ,$$

donde $\varepsilon(x-a)$ es una función de la que sólo sabemos que su límite para $x\to a$ es 0. Pero hay otra notación más frecuente para este resto.

Notación de Landau

La expresión $o(x-a)^n$ (*o pequeña,* o bien *o minúscula, de* $(x-a)^n$), con $n\in N$, representa una función *f* definida en un entorno de $x=a$ y de la que sabemos que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}=0\,.$$

Con esta definición es evidente que, si $f(x)=o(x-a)^n$, es también $f(x)=o(x-a)^m$ para cualquier $m<n$.

Propiedades. Se demuestran sin dificultad las siguientes propiedades, que para simplificar las expresiones enunciamos en el caso particular $a=0$:

1) $o(x^n)+o(x^m)=o\left(x^{min\{n,m\}}\right)$;
2) $\lambda\in \boldsymbol{R}^*:\ \lambda\cdot o(x^n)=o(x^n)$;
3) $o(x^n)\cdot o(x^m)=o(x^{n+m})$;
4) $o(x^n)\cdot x^m=o(x^{n+m})$;
5) $m\le n:\dfrac{o(x^n)}{x^m}=o(x^{n-m})$.

Por ejemplo, 1): si $n\le m$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^m}=0\,,$$

será

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^m}x^{m-n}=0\,,$$

y de forma parecida las demás.

Con la notación de Landau la fórmula de Taylor queda así:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x-a)^n,$$

o, si $a=0$,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Desarrollos de algunas funciones elementales en el punto $x=0$

Vamos a estudiar los desarrollos por la fórmula de Taylor, en un entorno del origen, de algunas funciones elementales tales como e^x, $sen\, x$, $cos\, x$, $sh\, x$, $ch\, x$, $log(1+x)$ y $(1+x)^\alpha$, donde α es un número real cualquiera. Y lo primero que observamos es que todas ellas son de clase C^∞, lo que significa que sus desarrollos podrán ser de *cualquier orden* $n\in N$.

1) *Función exponencial.* Si

$$f(x)=e^x,$$

sabemos que, para todo *n*,

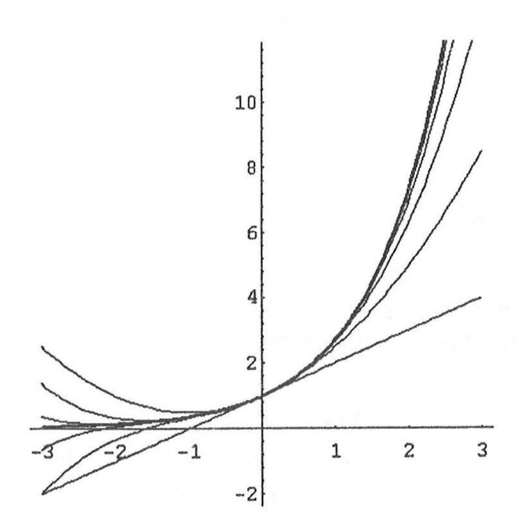
$$f^{(n)}(x)=e^x,$$

y en consecuencia

$$f^{(n)}(0)=1;$$

luego, para todo *n*,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$



En la figura se representan las gráficas de e^x (en trazo más grueso) y las de los polinomios $p_n(x)$ de sus desarrollos de Taylor para $n=1$, 2, 3, 4, 5 y 6, en el intervalo $[-3,3]$.

2) *Funciones trigonométricas.* Si

$$f(x)=sen\, x,$$

es

$$f^{(n)}(x) = sen\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

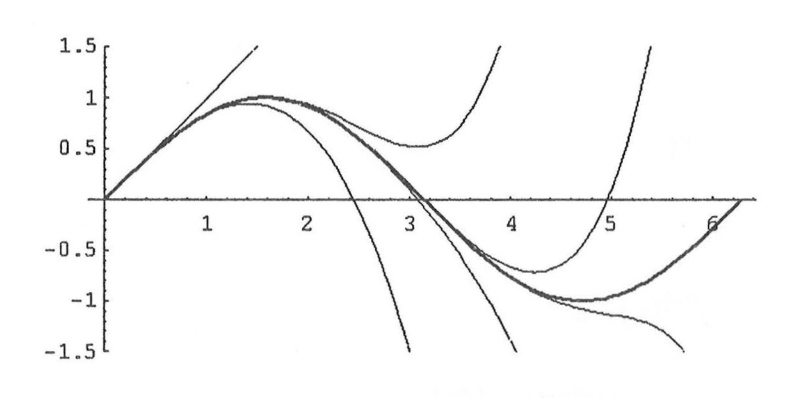
y

$$f^{(n)}(0) = sen\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par}, \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1; \end{cases}$$

luego

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

(desarrollo de orden $2n+2$, cuyo último coeficiente antes del resto es nulo).

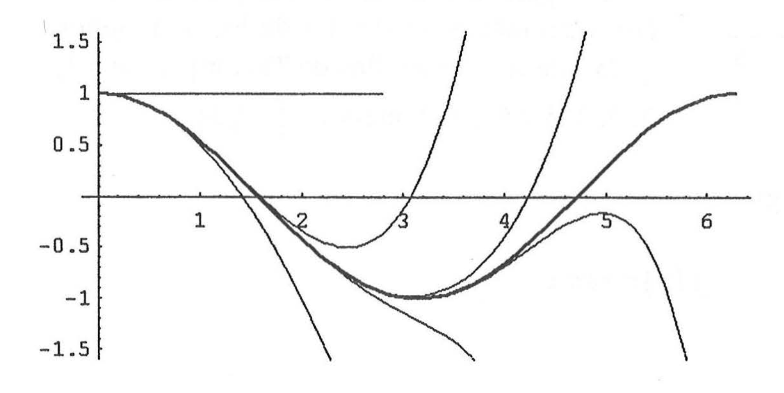


Como en el caso anterior, en la figura se representan las gráficas de $sen\, x$ y las de los polinomios $p_n(x)$ de sus desarrollos de Taylor, para $n = 1, 3, 5, 7, 9$ y 11 (ó 2, 4, 6, 8, 10 y 12), en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De forma totalmente análoga obtenemos

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

(desarrollo de orden $2n+1$), con las mismas observaciones para la figura: aparecen las gráficas de la función y de sus seis primeras aproximaciones polinómicas.



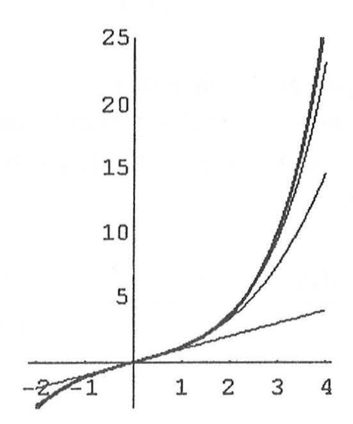
Nota. Si recordamos que la derivada de una función *par* (resp. *impar*) es una función *impar* (resp. *par*), y que una función impar ha de anularse en el origen si está definida en él, es natural que en el desarrollo de una función *par* (resp. *impar*) sólo aparezcan potencias *pares* (resp. *impares*).

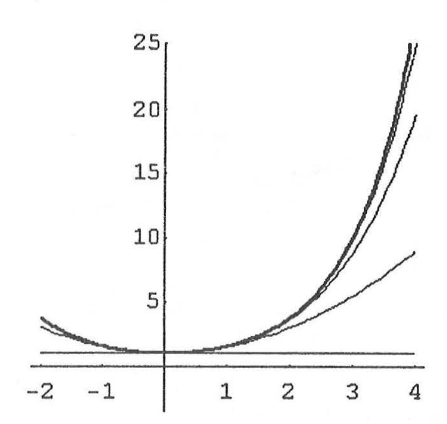
3) *Funciones hiperbólicas*. Recordando las definiciones,

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

resulta inmediatamente

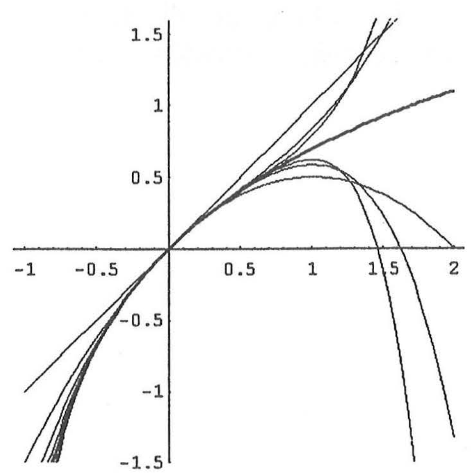
$$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right),$$
$$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$





Las figuras representan las dos funciones y sus cuatro primeras aproximaciones polinómicas en el intervalo $[-2,4]$.

4) *Desarrollo de* $f(x) = log(1+x)$. Se comprueba fácilmente que las derivadas de esta función son



$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n},$$

de donde

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

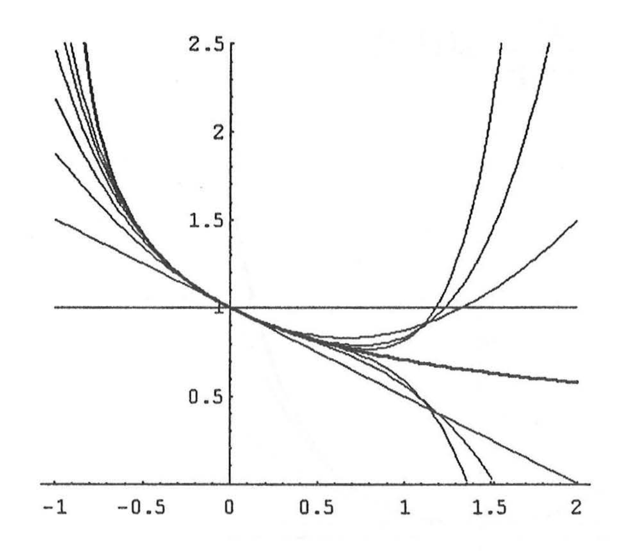
y el desarrollo es

$$log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n).$$

La figura de más arriba representa la función y sus primeros seis polinomios de Taylor en un entorno del origen.

5) *Desarrollo de las funciones* $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$. Las derivadas son

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$



y los coeficientes

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\binom{\alpha}{n},$$

donde, por analogía con la definición de los *números combinatorios* cuando el numerador es un número entero, hacemos

$$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\binom{\alpha}{n}.$$

Con esta notación el desarrollo es

$$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n),$$

es decir, formalmente análogo al *binomio de Newton* o potencia entera de $1+x$.

Naturalmente, aquí tenemos en realidad los desarrollos de infinitas funciones distintas, tantas como valores reales para α. En la figura se ha representado la función y sus primeras aproximaciones en el caso $\alpha=-\frac{1}{2}$.

II - Desarrollos limitados

Desarrollos limitados en un entorno de $x = 0$

Definición. Dada una función f definida en un entorno del origen $x = 0$, se dice que admite un desarrollo limitado de orden n si existe un polinomio de grado n,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k ,$$

tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p_n(x)}{x^n} = 0 .$$

Con notación de Landau es entonces

$$f(x) = p_n(x) + o(x^n).$$

Como ya dijimos en el caso de los desarrollos de Taylor, $p_n(x)$ es la llamada *parte regular* del desarrollo.

Ejemplos de desarrollos limitados son todos los desarrollos por la fórmula de Taylor que conocemos. Pero no son los únicos.

Ejemplo. La función f definida por la expresión

$$f(x) = \cos x + x^3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

admite el desarrollo

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

como se comprueba sin dificultad aplicando la definición y recordando el desarrollo de Taylor de $\cos x$; y sin embargo, también puede comprobarse que *no existe* $f''(0)$, es decir, f no es desarrollable por la fórmula de Taylor hasta el término en x^2.

Propiedades de los desarrollos limitados

Enunciaremos a continuación dos propiedades básicas, cuya demostración obvia omitiremos.

1) *Unicidad.* Si

$$f(x) = p_n(x) + o(x^n)$$

y

$$f(x) = q_n(x) + o(x^n),$$

siendo $q_n(x)$ otro polinomio de grado *n*, entonces $p_n(x)$ y $q_n(x)$ son idénticos.

2) *Truncamiento.* Si

$$f(x) = p_n(x) + o(x),$$

entonces

$$f(x) = p_m(x) + o(x^m)$$

(donde $p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\, x^k$) para $0 \leq m < n$.

Operaciones con desarrollos limitados

Se verifican también las siguientes proposiciones, cuya demostración (no siempre obvia) no daremos tampoco.

1) *Suma, producto* y *división.* Si

$$f(x) = p_n(x) + o(x^n)$$

y

$$g(x) = q_n(x) + o(x^n),$$

entonces:

$$(f + g)(x) = p_n(x) + q_n(x) + o(x^n)$$

y

$$(f \cdot g)(x) = [p_n(x) \cdot q_n(x)]_n + o(x^n),$$

donde $[\ ]_n$ representa los términos de grado $\leq n$ del polinomio entre corchetes;

y si $g(0) \neq 0$, entonces también

$$\frac{f}{g}(x) = \left[\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right]_n + o(x^n)$$

(donde la división de polinomios se efectúa en orden *creciente* de potencias).

Ejemplo. De los desarrollos de quinto orden

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

resulta, dividiendo,

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \hline -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} & \\ \hline \frac{2x^5}{15}, & \end{array}$$

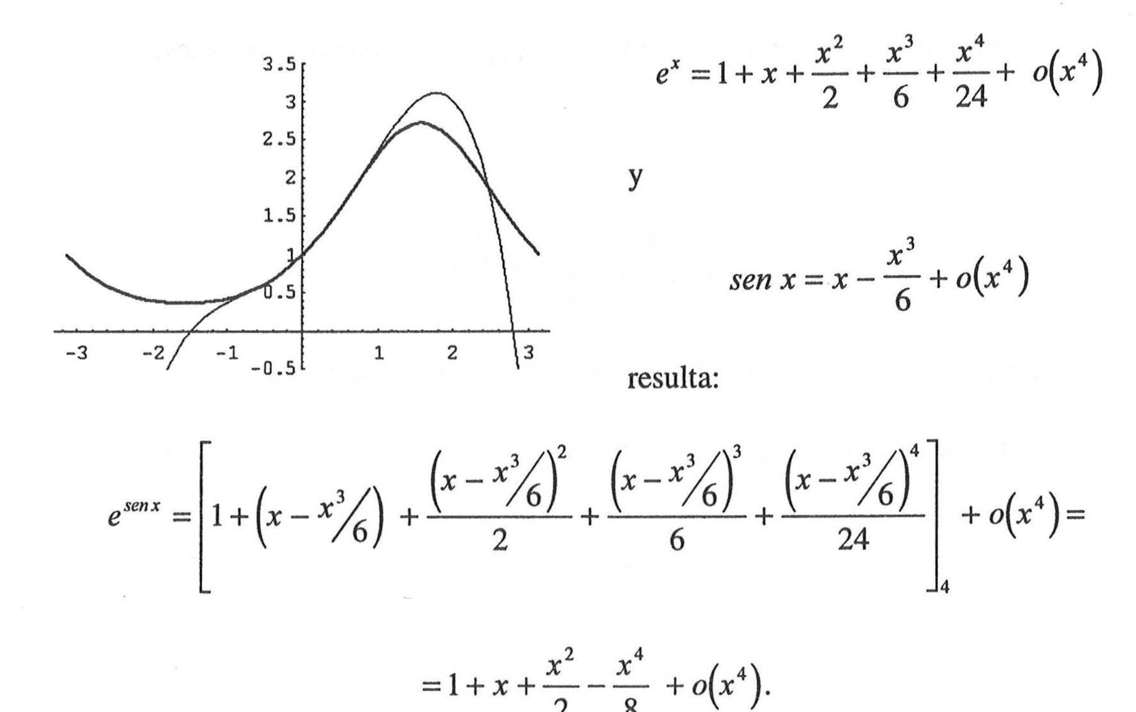
es decir,

$$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

2) *Composición.* Si $g(0) = 0$, entonces

$$f \circ g(x) = [p_n(q_n(x))]_n + o(x^n).$$

Ejemplo 1. De



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

y

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

resulta:

$$e^{sen\, x} = \left[1 + \left(x - {x^3}/{6}\right) + \frac{\left(x - {x^3}/{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - {x^3}/{6}\right)^3}{6} + \frac{\left(x - {x^3}/{6}\right)^4}{24} \right]_4 + o(x^4) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

La figura muestra las gráficas de f y de la parte regular del desarrollo calculado.

Ejemplo 2. La función

$$f(x) = \frac{log(1+x) - x}{x}$$

admite, en un entorno del origen, el desarrollo

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^5}{6} + o(x^5),$$

lo que nos dice que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$$

(obsérvese que lo primero significa que el desarrollo nos da automáticamente hecha la *prolongación por continuidad* a $x = 0$), y por lo tanto existe, en un entorno del origen, la función inversa f^{-1}, siendo $f^{-1}(0) = 0$, $\left(f^{-1}\right)'(0) = -2$. Calculemos el desarrollo limitado de orden 5 de esta función en el origen (f^{-1} es de clase C^∞, como f), utilizando para ello la identidad

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Sea

$$f^{-1}(x) = -2x + a\,x^2 + b\,x^3 + c\,x^4 + d\,x^5 + o(x^5).$$

Componiendo los desarrollos, resulta

$$\left[-2\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}\right)+a\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+b\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3+c\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^4+d\left(-\frac{x}{2}\right)^5\right]_5+o(x^5)=$$

$$= x+\left(-\frac{2}{3}+\frac{a}{4}\right)x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{3}-\frac{b}{8}\right)x^3+\left(-\frac{2}{5}+\frac{13a}{36}+\frac{b}{4}+\frac{c}{16}\right)x^4+$$

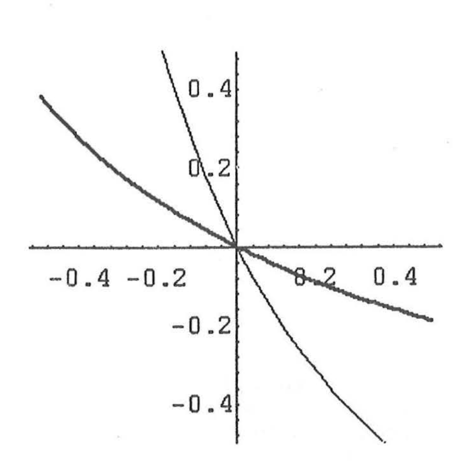
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{11a}{30}-\frac{17b}{48}-\frac{c}{6}-\frac{d}{32}\right)x^5+o(x^5),$$

e identificando su parte regular con el polinomio x, es decir, anulando los coeficientes de los términos de grados 2, 3, 4 y 5, resulta

$$a=\frac{8}{3},\quad b=-\frac{28}{9},\quad c=\frac{464}{135}\ \text{ y }\ d=-\frac{1496}{405}$$

y finalmente

$$f^{-1}(x) = -2\,x+\frac{8\,x^2}{3}-\frac{28\,x^3}{9}+\frac{464\,x^4}{135}-\frac{1496\,x^5}{405}+o(x^5).$$



Vemos que, aun no pudiendo escribir la función f^{-1} *explícitamente* (no es una función elemental), sí podemos aproximarla polinomialmente tanto como queramos.

La figura muestra las gráficas de f y de la parte regular del desarrollo de f^{-1}, y permite apreciar su simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante (simetría que es la expresión gráfica del intercambio de las variables x e y entre f y f^{-1}).

Primitivas de una función desarrollable

Si es

$$f(x)=p_n(x)+o(x^n)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$$

y existe una función derivable g tal que

$$f=g'$$

en un entorno de $x=0$, entonces

$$g(x)=g(0)+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1}).$$

Ejemplo 1. De

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}=\frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2},$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}),$$

resulta

$$arc\,tg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}).$$

Ejemplo 2. Consideremos la función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

en cuyo desarrollo aparecerán los coeficientes

$$\binom{-1/2}{n}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n},$$

con lo que resulta:

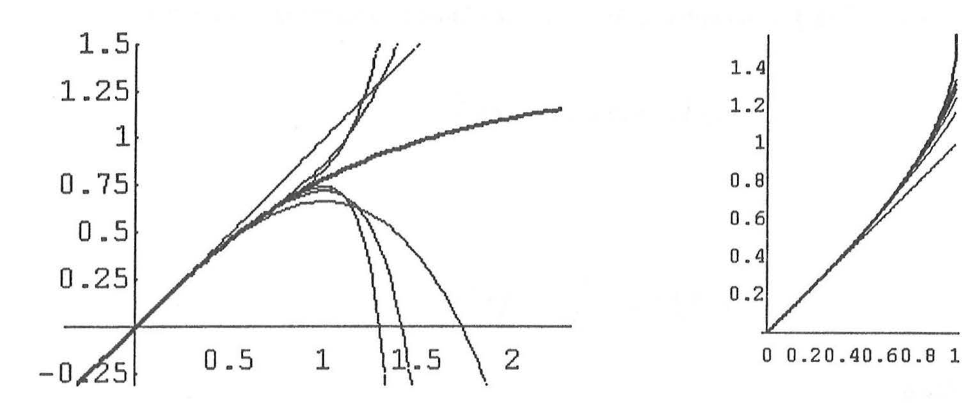
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}x^n+o(x^n).$$

Compongamos esta función con $g(x) = -x^2$:

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right),$$

y de aquí, recordando la función *arc sen* y su derivada, obtenemos el desarrollo

$$arc\,sen\,x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n\cdot (2n+1)}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right).$$



En las figuras pueden verse representados los dos últimos desarrollos vistos, igual que en casos anteriores.

Propiedades de una función desarrollable

Teorema. Si *f* admite un desarrollo limitado de orden $n \geq 1$ en $x = 0$, entonces es continua y derivable una vez en dicho punto.

Demostración. Si $f(x) = p_n(x) + o(x^n) = a_0 + a_1 x + o(x)$ (truncamiento), resulta

$$f(0) = a_0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = a_0,$$

y

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - a_0}{x} = \lim_{x\to 0}\left(a_1 + o(1)\right) = a_1.$$

No puede decirse más, en general, acerca de la continuidad y derivabilidad de f. Por ejemplo, la función f definida por la expresión

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \begin{cases} +x^{n+1} & si\ x \in \boldsymbol{Q} \\ -x^{n+1} & si\ x \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}, \end{cases}$$

donde n es un entero cualquiera, admite desarrollo limitado de orden n en $x = 0$ ya que, evidentemente, el último término de la definición puede escribirse como $o(x^n)$; y sin embargo *no es ni siquiera continua* fuera de ese punto, puesto que sólo en él tiene límite.

Tampoco es cierto, en general, que si es

$$f(x) = p_n(x) + o(x^n)$$

haya de ser

$$f'(x) = p_n'(x) + o(x^{n-1}),$$

aun suponiendo que exista $f'(x)$ en un entorno de $x = 0$. Por ejemplo, sabemos que la función

$$f(x) = cos\, x + x^3\, sen \frac{\pi}{x}$$

admite el desarrollo

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

y sin embargo es falso que

$$f'(x) = -x + o(x),$$

ya que no existe

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) + x}{x}.$$

Desarrollos limitados y desarrollos de Taylor

Recapitulemos, haciendo sobre lo ya visto dos observaciones. La primera es que todo desarrollo por la fórmula de Taylor es un desarrollo limitado, pero no recíprocamente; hay funciones que no cumplen las condiciones de regularidad exigidas por el teorema de Taylor y sin embargo admiten un desarrollo. El concepto de desarrollo limitado es, pues, más general que el de desarrollo de Taylor, que es un simple caso particular de aquél (aunque en la práctica los desarrollos de la mayor parte de las funciones que utilizamos son de Taylor).

La segunda observación es que, operando con desarrollos conocidos, podemos obtener el desarrollo de una función sin calcular sus derivadas sucesivas, incluso sin preguntarnos si esas derivadas existen.

Desarrollos en un entorno de $x = a \neq 0$

Todo lo dicho para $x = 0$ se aplica sin dificultad al caso en que x sea otro punto $a \neq 0$. El

desarrollo tomaría la forma

$$f(x) = p_n(x-a) + o(x-a)^n,$$

con la definición obvia y las mismas propiedades.

Un simple cambio de variable, $x = a + t$, nos permitiría pasar de un desarrollo a otro: escribiendo $f(x) = f(a+t) = g(t)$, si es

$$g(t) = p_n(t) + o(t^n)$$

en un entorno de $t = 0$, será entonces

$$f(x) = p_n(x-a) + o(x-a)^n$$

en un entorno de $x = a$.

Ejemplo. De

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3),$$

haciendo $x = 1 + t$ resulta

$$f(1+t) = (2+t)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{t}{3\cdot 2} - \frac{t^2}{9\cdot 2^2} + \frac{5t^3}{81\cdot 2^3}\right) + o(t^3),$$

y finalmente

$$f(x) = \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{x-1}{6} - \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{5(x-1)^3}{648}\right) + o(x-1)^3$$

en un entorno de $x = 1$ (desarrollo que habríamos podido obtener también directamente mediante la fórmula de Taylor, desde luego).

III - Aplicaciones de los desarrollos limitados

Como ya hemos indicado, los desarrollos limitados con el resto en forma de Landau o similar son una propiedad eminentemente *local*, con aplicaciones en todo lo relativo al estudio local de una función en un punto, sea al cálculo de límites, sea a la búsqueda de extremos locales, sea al estudio de la concavidad, convexidad o puntos de inflexión. Los de Taylor con el resto de Lagrange, en cambio, nos permiten aproximar el valor numérico de una función en un punto, acotando el error.

Desarrollos limitados y límites

La eficacia del cálculo con desarrollos limitados en el estudio de límites la veremos mejor mediante ejemplos.

Ejemplo 1. Supongamos que queremos calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x\,log\left(1+x^2\right)-tg^3\,x}{x\,(cos\,x-1)^2}.$$

Tenemos:

$$sen\,x\,log\left(1+x^2\right)=\left[\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right)\right]_5+o\left(x^5\right)=x^3-\frac{2x^5}{3}+o\left(x^5\right);$$

$$tg^3\,x=\left[\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right)^3\right]_5+o\left(x^5\right)=x^3+x^5+o\left(x^5\right);$$

$$sen\,x\,log\left(1+x^2\right)-tg^3\,x=-\frac{5x^5}{3}+o\left(x^5\right);$$

$$x\,(cos\,x-1)^2=\left[x\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)^2\right]_5+o\left(x^5\right)=\frac{x^5}{4}+o\left(x^5\right);$$

de todo lo cual resulta

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\,log(1+x^2)-tg^3x}{x\,(cos\,x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{5x^5}{3}+o(x^5)}{\dfrac{x^5}{4}+o(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{5}{3}+o(1)}{\dfrac{1}{4}+o(1)}=-\frac{20}{3}.$$

Nota 1. Si

$$f(0)=0,\quad f(x)=a_m x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\cdots+a_n x^n+o(x^n),$$

es evidente que se verifica la equivalencia

$$f(x)\sim a_m x^m$$

para $x\to 0$. Así encontramos de nuevo las equivalencias básicas que conocíamos, como

$$sen\,x\sim x,\quad cos\,x-1\sim-\frac{x^2}{2},\quad log(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,$$

etc., todas ellas cuando x tiende a 0 (elegimos este punto por comodidad de expresión, pero lo mismo sería en otro cualquiera). Es decir, dichas equivalencias están expresadas en los propios desarrollos, y su uso se reduce a sustituir un *factor* infinitésimo por el primer término de su desarrollo correspondiente (su llamada *parte principal*). Así, en el anterior *Ejemplo 1* habríamos podido desde el principio cambiar el denominador por $\dfrac{x^5}{4}$. Veamos otro caso.

Ejemplo 2. Calculemos el límite de la función *f*, definida para $x>-1$, $x\neq 0$ por la expresión

$$f(x)=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{log(1+x)},$$

en el punto $x=0$.

Se trata, desde luego, de una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Tenemos:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{log(1+x)}{x}};\quad \frac{log(1+x)}{x}=\frac{x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}=1-\frac{x}{2}+o(x);\quad f(x)=\frac{e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}-e}{log(1+x)}=$$

$$=e\,\frac{e^{-\frac{x}{2}+o(x)}-1}{log(1+x)};\quad \lim_{x\to 0}f(x)=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x}{2}+o(x)}-1}{log(1+x)}=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x}{2}+o(x)}{x}=-\frac{e}{2}.$$

Nota 2. Supongamos que tenemos dos funciones f y g, tales que $f(0)=g(0)=0$ y cuyos desarrollos en el origen (misma observación que antes) son

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+o(x^2), \quad g(x)=b_1x+b_2x^2+o(x^2);$$

el cálculo del límite de su cociente en dicho punto presenta una indeterminación $\frac{0}{0}$. Pero

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{a_1x+a_2x^2+o(x^2)}{b_1x+b_2x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a_1+a_2x+o(x)}{b_1+b_2x+o(x)}=\frac{a_1}{b_1},$$

que es lo que habríamos obtenido mediante la regla de L'Hôpital, puesto que a_1 y b_1 son respectivamente $f'(0)$ y $g'(0)$; y naturalmente, si $a_1=b_1=0$, el límite sería

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_2+o(1)}{b_2+o(1)}=\frac{a_2}{b_2},$$

lo que equivaldría a utilizar la regla de L'Hôpital *dos veces*, en caso de ser ello posible, etc. Es decir, vemos que los desarrollos van más allá de dicha regla, la *incluyen*, por así decir (como pasaba con las equivalencias), con la ventaja de que podemos no necesitar derivar (podrían incluso no existir las derivadas a partir de un determinado orden), sino obtener los desarrollos operando con otros conocidos, como en el *Ejemplo 1* visto más arriba (en el que, por cierto, si hubiéramos aplicado L'Hôpital habríamos tenido que derivar numerador y denominador *cinco veces*).

Desarrollos limitados y extremos locales

Decimos que una función f tiene un *máximo* (respectivamente *mínimo*) *local* en un punto x_0 si en un entorno del mismo se verifica que $f(x_0+h)<f(x_0)$ (resp. $f(x_0+h)>f(x_0)$) para $h\neq 0$.

Si f tiene un *extremo* (es decir, un *máximo* o un *mínimo*) *local* en x_0 y es derivable en dicho punto, entonces $f'(x_0)=0$. Basta ver que, si se trata por ejemplo de un mínimo, la expresión

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

es positiva o negativa según lo sea h (el numerador es positivo en ambos casos), y puesto que tiene límite éste ha de ser nulo. Y lo mismo para un máximo.

Pero esta condición necesaria no es suficiente, como muestra por ejemplo la función $f(x)=x^3$ en el punto $x=0$. A encontrar condiciones suficientes nos ayudan los desarrollos limitados.

Teorema. Sea f una función que admita, en un entorno de un punto x_0, un desarrollo de orden $n>1$ tal que $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0\neq a_n$. Entonces:

si *n* es *impar*, *no hay extremo local*; si *n* es *par*, hay *máximo* o *mínimo* según que a_n sea *negativo* o *positivo*.

Demostración. Según las hipótesis, es

$$f(x_0+h)-f(x_0)=a_nh^n+o(h^n)=(a_n+o(1))h^n,$$

donde $a_n+o(1)$ tendrá, en un entorno de x_0, el mismo signo que a_n, por ser $o(1)$ un infinitésimo. Luego, si n es impar, el signo de la diferencia del primer miembro cambiará al cambiar el de *h*: no hay extremo. Y si *n* es par, el signo se mantendrá igual al de a_n, y habrá mínimo o máximo según que éste sea positivo o negativo. ■

Naturalmente no debe olvidarse que, *si f admite n derivadas en* x_0, es $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ para $1\leq k\leq n$, y en ese caso toda esta discusión en términos de coeficientes del desarrollo puede plantearse en términos de derivadas, como es más habitual.

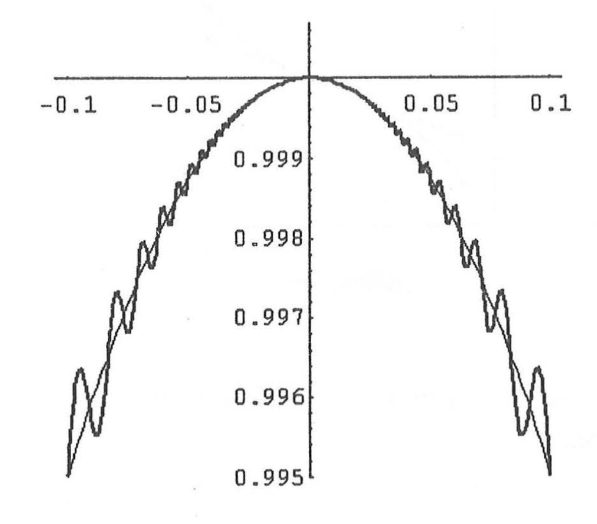
Ejemplo. La función considerada más arriba, $f(x)=cos\,x+x^3\,sen\dfrac{\pi}{x}$, tiene derivada nula en el origen, y en su desarrollo,

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

vemos que

$$a_2=-\frac{1}{2}<0,$$

es decir, el primer coeficiente posterior a a_1 que no se anula es de orden par y negativo: luego existe un máximo local (igual que en la función $p_2(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$, parte regular del desarrollo).



La figura muestra, con trazos grueso y fino respectivamente, las gráficas de la función f y del polinomio

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

en un entorno del origen, e ilustra intuitivamente la similitud de ambas en puntos próximos a $x = 0$, así como la existencia para ambas de un máximo local en dicho punto.

Desarrollos limitados y concavidad, convexidad e inflexiones

Dada una función f derivable en un punto x_0, decimos que es *cóncava* (resp. *convexa*) en dicho punto si en un entorno del mismo se verifica que, para $h \neq 0$,

$$f(x_0 + h) < f(x_0) + h \cdot f'(x_0) \quad \text{(resp. } f(x_0 + h) > f(x_0) + h \cdot f'(x_0)\text{)};$$

y que tiene un *punto de inflexión* si la expresión

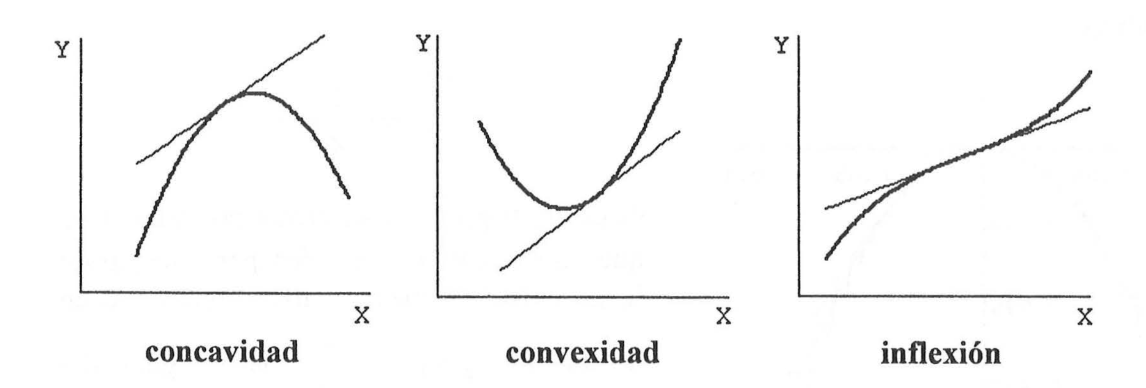
$$\frac{f(x_0 + h) - (f(x_0) + h \cdot f'(x_0))}{h}$$

no cambia de signo al cambiar el de *h*.

Recordando que

$$y = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

es la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto $x = x_0$, estos conceptos tienen una interpretación geométrica clara: f es cóncava o convexa en un punto según que la *curva* se mantenga por *debajo* o por *encima* de la tangente, y tiene una inflexión si la curva *atraviesa* la tangente.



concavidad **convexidad** **inflexión**

Teorema. Sea f una función que admita, en un entorno de un punto x_0, un desarrollo de orden $n > 2$ tal que $a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0 \neq a_n$. Entonces:

si n es *impar*, hay un *punto de inflexión*; si n es *par*, *no* lo hay, y f es *cóncava* o *convexa* según que a_n sea *negativo* o *positivo*.

Demostración. Según las hipótesis, podemos escribir

$$f(x_0+h)-(f(x_0)+h\cdot f'(x_0))=a_n h^n+o(h^n)=(a_n+o(1))h^n,$$

luego, con el mismo razonamiento de antes, si n es impar, el signo de

$$\frac{f(x_0+h)-(f(x_0)+h\cdot f'(x_0))}{h}$$

será el de $a_n h^{n-1}$, es decir, no variará y habrá inflexión; y si n es par, el signo que no variará será el de

$$f(x_0+h)-(f(x_0)+h\cdot f'(x_0)),$$

que será igual al de a_n, y de ahí el resultado. ■

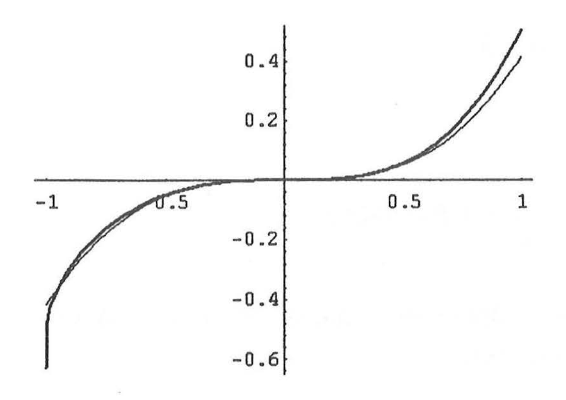
Ejemplo . Sea la función f definida para $x>-1$ por la expresión

$$f(x)=e^x-\frac{x\,sen\,x}{log(1+x)}-1;$$

a partir de los desarrollos de e^x, $sen\,x$ y $log(1+x)$ se obtiene sin dificultad, operando,

$$f(x)=\frac{5}{12}x^3+o(x^3);$$

al ser



$$a_2=0,\ a_3\neq 0,$$

en $x=0$ hay un *punto de inflexión*.

La figura muestra las gráficas de la función f y de la parte regular de su desarrollo de orden tres,

$$p_3(x)=\frac{5}{12}x^3,$$

lo mismo que en el último ejemplo anterior.

Desarrollos de Taylor-Lagrange y cálculo numérico

Como ya indicamos, el problema de calcular con una determinada aproximación el valor numérico de una función f en un punto dado, $x = a + h$, conociendo los valores de f y sus derivadas en el punto $x = a$, se reduce a encontrar una acotación para el error, que no es otro que

$$\left|f(a+h) - p_n(a+h)\right| = \left|r_n(a+h)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(a+\theta h)\right|}{(n+1)!}|h|^{n+1},$$

lo que es posible si conocemos una cota de las derivadas de *f*. Lo veremos mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Supongamos que queremos calcular el valor de $sen 1$ con ocho cifras decimales. La fórmula de Taylor con el resto de Lagrange nos da

$$sen 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!},$$

donde $f^{(2n+2)}(\theta)$ es la derivada de orden $2n+2$ de la función *seno* en un punto $\theta \in (0, 1)$, es decir,

$$\left|f^{(2n+2)}(\theta)\right| < 1, \quad \text{y} \quad \left|r_n(1)\right| < \frac{1}{(2n+2)!};$$

luego bastará tomar un valor de n tal que

$$\frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-8},$$

cosa que es fácil comprobar que ocurre a partir de $n = 5$.

En conclusión, pues,

$$sen 1 \cong 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} = 0{,}84147098.$$

Ejemplo 2. Calculemos el valor de e con diez decimales, haciendo $x = 1$ en el desarrollo de Taylor-Lagrange de la función exponencial:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!},$$

donde

$$e^{\theta} < e < 3,$$

acotación ésta última que conocemos desde la definición misma del número *e*. Habremos de encontrar, pues, un *n* tal que

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-10}, \quad \text{o bien} \quad (n+1)! > 3 \cdot 10^{10},$$

lo que se verifica ya para $n = 14$. Por lo tanto,

$$e \cong \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{n!} = 2{,}7182818284\,.$$

Ejemplo 3. Sea ahora nuestro objetivo el cálculo de $\sqrt[3]{7}$. Para ello utilizaremos el desarrollo de $(1+x)^{\frac{1}{3}}$, y para que la aproximación sea rápida nos interesa que *x*, cuyas potencias van a aparecer, sea pequeño, lo que podemos conseguir multiplicando y dividiendo 7 por el cubo de algún número apropiado; elijamos el número 10 (lo que equivale a tomar la raíz inicial por defecto con una cifra decimal). Será:

$$\sqrt[3]{7} = \frac{\sqrt[3]{7000}}{10};$$

la raíz cúbica entera por defecto de 7000 es 19, resultando

$$7000 = 19^3 + 141 = 19^3(1+\Delta), \text{ donde } \Delta = \frac{141}{19^3} \cong 0{,}021\,.$$

De esta forma tenemos:

$$\sqrt[3]{7} = \frac{1}{10}\sqrt[3]{19^3(1+\Delta)} = 1{,}9\,(1+\Delta)^{\frac{1}{3}} = 1{,}9\left(1 + \frac{1}{3}\Delta + \binom{1/3}{2}\Delta^2 + \cdots + \binom{1/3}{n}\Delta^n\right) + r_n\,,$$

donde

$$|r_n| = 1{,}9\left|\binom{1/3}{n+1}(1+\theta\Delta)^{\frac{1}{3}-n-1}\Delta^{n+1}\right| < 1{,}9\left|\binom{1/3}{n+1}\right|\Delta^{n+1};$$

para $n = 2$,

$$|r_2| < 1{,}9\,\frac{5}{81}\Delta^3 < \frac{1}{8 \cdot 40^3} < 10^{-5}$$

(ya que $\Delta < \frac{1}{40} = 0{,}025$), luego obtenemos con seguridad cinco cifras decimales exactas. Tomando, con cinco cifras, $\Delta = 0{,}02056$, resulta

$$\sqrt[3]{7} \cong 1{,}9\left(1 + \frac{1}{3}\Delta + \binom{1/3}{2}\Delta^2\right) = 1{,}91293.$$

Ejemplo 4. Cálculo de logaritmos. Sabemos que

$$f(x) = log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

donde

$$f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n n!(1+\theta x)^{-n-1},$$

y por lo tanto, si $x > 0$,

$$|r_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| < \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

Si hacemos

$$1 + x = \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N}$$

tendremos

$$log(N+1) = log\, N + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\,N^n} + r_n\left(\frac{1}{N}\right),$$

con

$$\left|r_n\left(\frac{1}{N}\right)\right| < \frac{1}{(n+1)N^{n+1}},$$

es decir, una fórmula de recurrencia que aproxima el valor del logaritmo de un entero a partir del logaritmo del anterior, siendo la aproximación más rápida cuanto mayor sea el valor de *N*. Pero podemos hacer algo mejor: restando los desarrollos

$$log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+o\left(x^{2n+2}\right),$$
$$log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

obtenemos

$$log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)+o\left(x^{2n+2}\right),$$

y haciendo ahora

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{N+1}{N}, \text{ es decir, } x=\frac{1}{2N+1},$$

resulta

$$log(N+1)=log\,N+2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3(2N+1)^3}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}\right)+s_n(N),$$

donde, para $n\rightarrow\infty$, $s_n(N)$ tiende a 0 mucho más rápidamente (sobre todo si el valor de N no es muy grande) que el anterior resto $r_n\left(\frac{1}{N}\right)$ (es fácil demostrar la acotación

$$s_n(N)<\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}}).$$

Por ejemplo, en el caso $N=1$ tenemos:

$$log\,2=2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\right)+s_n(2),$$

expresión en la que para $n=5$ obtenemos ya *seis* cifras decimales exactas,

$$log\,2\cong 0{,}693147.$$

Para $N=2$ y $N=4$ será, respectivamente,

$$log\,3=log\,2+2\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot 5^{2n+1}}\right)+s_n(2),$$

$$log\,5=2\,log\,2+2\left(\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot 9^{2n+1}}\right)+s_n(4),$$

expresiones que, para $n = 3$ en el primer caso y $n = 2$ en el segundo, nos dan *seis* cifras decimales, resultando:

$$log\,3 \cong 1{,}098612\,, \qquad log\,5 \cong 1{,}609438\,.$$

Así podríamos ir obteniendo los logaritmos de los enteros (nos bastaría limitarnos a los números primos, naturalmente).

Y lo mismo para los racionales. Por ejemplo,

$$log\,1{,}647 = log\frac{1647}{1000} = log\frac{3^3 \cdot 61}{2^3 \cdot 5^3}\,,$$

y como

$$log\,61 = log\left(2^2 \cdot 3 \cdot 5 + 1\right) \cong 2\,log\,2 + log\,3 + log\,5 + 2\left(\frac{1}{1 \cdot 121} + \frac{1}{3 \cdot 121^3}\right)$$

(estos *dos* sumandos nos dan ya *diez* cifras para el paréntesis), resulta finalmente

$$log\,1{,}647 \cong -log\,2 + 4\,log\,3 - 2\,log\,5 + 2 \cdot 0{,}008265 = 0{,}498955\,.$$

Para expresiones decimales más largas (periódicas o no) podemos hacer una simple interpolación lineal (es decir, si a y b son dos números *próximos* cuyos logaritmos conocemos, y es $a - b = \delta$, $log\,a - log\,b = \Delta$, tomar, para cualquier número entre a y b, es decir, para $a + \theta\delta$ con $0 < \theta < 1$,

$$log(a + \theta\,\delta) = log\,a + \theta\,\Delta\,).$$

Observación. Acabamos de ver, con algunos ejemplos, cómo podemos calcular valores numéricos de diferentes funciones sin más que sumar, restar, multiplicar y dividir. Con los medios actuales de cálculo automático, ordenadores o simples calculadoras, la importancia práctica de todo esto es escasa. No obstante, es interesante la vía por la que se llega a aproximar esos valores, vía con la que se construyen las tablas y que las propias máquinas siguen. Después de todo, si el usuario de una máquina quiere hacer un uso sano de ella conviene que sepa más que ella.

Bibliografía

En algunos puntos de estas notas se ha consultado el libro

J. M. Arnaudiès, H. Fraysse: *Analyse*. Dunod Université, Paris 1988.

Para la sección de cálculo numérico se ha utilizado también el ya clásico

J. Rey Pastor: *Teoría de funciones*. Biblioteca Matemática S.L., Madrid 1973.

ÍNDICE

NOTAS

CUADERNO

8.02

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

